

CONTANDO ARESTAS – LÓGICA, GEOMETRIA E COMBINATÓRIA

Counting edges – Logic, Geometry and Combinatorics

Henrique Marins de Carvalho¹

Resumo: O texto aborda a elaboração de uma tarefa inspirada na abordagem Mentalidades Matemáticas (MM), desenvolvida por Jo Boaler, com o intuito de promover um aprendizado matemático que valorize múltiplas estratégias de resolução de problemas, diversas representações dos objetos de aprendizagem e a valorização do erro no processo de construção do conhecimento. O estudo foi qualitativo e exploratório, utilizando a técnica de pesquisa-ação. Uma tarefa selecionada de um repositório *online* foi adaptada às necessidades de disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior. O processo de elaboração das tarefas foi orientado por diretrizes recebidas em uma oficina de formação pedagógica. Foram identificados, como resultados, que são elementos importantes para a formulação e execução de uma atividade aberta o planejamento de efetivo trabalho em grupo, a flexibilidade de uso de diversas representações, o estímulo da curiosidade e a reflexão sobre o aprendizado matemático.

Palavras-chave: Mentalidades Matemáticas; tarefas abertas; contagem; triângulo aritmético; argumentação.

Abstract. *The subject of this report is the development of a task inspired by the Mathematical Mentalities (MM) approach, developed by Jo Boaler, with the aim of promoting mathematical learning that values multiple problem-solving strategies, diverse representations of learning objects and the appreciation of error in the knowledge-building process. The study was qualitative and exploratory, using the action research technique. A task selected from an online repository was adapted to the needs of a subject in a Mathematics degree course at a higher education institution. The task development process followed guidelines based on a pedagogical training workshop. We identified important elements for the formulation and execution of an open activity: planning for effective group work, flexibility in the use of different representations, stimulating curiosity and reflection on mathematical learning.*

Keywords: *Mathematical mindsets; open tasks; counting; arithmetic triangle; argumentation.*

¹Doutor em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) – campus São Paulo. Email: hmarins@ifsp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5484-2199>

1. Introdução

A abordagem Mentalidades Matemáticas (que neste trabalho também será identificada como MM), proposta pela educadora matemática Jo Boaler, tem como objetivo propiciar um aprendizado de Matemática valorizando múltiplas estratégias de resolução de problemas, diversas representações dos objetos de aprendizagem e a valorização do erro no processo de conjecturas, refutações e construção de conhecimento.

Para atingir esses vários e complexos objetivos, são necessárias tarefas adequadas ao desenvolvimento de habilidades para interpretar enunciados, propor soluções e justificar os processos realizados, já que não se alinham com as propostas pedagógicas de MM as listas de exercícios que exigem a repetição de um mesmo procedimento ou enunciados que antecipadamente declaram as ferramentas que devem ser usadas para a solução do problema.

O Centro Youcubed, na Universidade de Stanford, que tem como fundadoras Jo Boaler e Cathy Williams, busca oferecer um rol de tarefas, bem como se propõe a disseminar práticas de ensino e aprendizagem em consonância com os princípios de Mentalidades Matemáticas.

Graças à uma colaboração entre esse Centro e o Instituto Sidarta, em agosto de 2019, o professor e Diretor de Pesquisa do Youcubed, Jack Dieckmann, ministrou a oficina intitulada *Práticas de Mentalidades Matemáticas: desenvolvendo atividades abertas, criativas e visuais*, em que as pessoas participantes foram convidadas a selecionar uma tarefa já existente no repositório Youcubed, adaptar de acordo com as necessidades do público alvo, realizar a referida atividade e comentar suas observações.

Neste artigo descreve-se o processo de elaboração de tarefa inspirada em materiais disponíveis nesse repositório, caracterizando a turma para a qual foi proposta, bem como os objetos de aprendizagem que podem ser explorados em sua execução.

Na seção seguinte, são apresentados elementos básicos da abordagem MM, como critérios para avaliar a coerência de tarefas que sejam desenhadas como recursos para o desenvolvimento de uma prática matemática investigativa.

Posteriormente, descreve-se o lócus da pesquisa, bem como a metodologia adotada. Segue-se, propriamente, ao relato da elaboração da tarefa e das reflexões feitas pelo autor e participantes durante o processo.

2. Revisão de Literatura e base teórica

A primeira dissertação realizada em um programa de mestrado no Brasil que descreveu as características desta abordagem foi defendida em 2019, pela professora e pesquisadora Laissa Figueiredo do Valle, que descreve a trajetória de Jo Boaler desde suas primeiras pesquisas sobre o ensino de matemática até a formulação das *Mathematical Mindsets*, na formulação original, em inglês.

Valle (2019, p. 51) apresenta, ainda, sua percepção sobre as ideias constituintes dessa abordagem, salientando que esta lista não esgota todas as teorias ou pressupostos adotados por Boaler: “*mindset* de crescimento; erro, esforço e desafio na perspectiva da neurociência; matemática multidimensional; educação para equidade e trabalho colaborativo; e avaliação para aprendizagem.”

Boaler considera os conceitos de mentalidade fixa (*fixed mindset*) e mentalidade de crescimento (*growth mindset*) a partir dos trabalhos da psicóloga Carol Dweck entendendo *mentalidade* como “uma crença fundamental sobre como se aprende” (Dweck, 2006, apud Boaler, 2016, p. 15). Nesse contexto, identificam-se mitos como: ‘matemática é para poucos’, ‘existem pessoas que nasceram para a matemática’ ou que ‘matemática é um dom’, refutados pelas duas pesquisadoras, que sugerem que tais discursos são geradores de aversão pela matemática e são danosos para uma educação equitativa.

Sobre a questão do *erro* no processo de aprendizagem, Boaler ressalta também o efeito de concepções equivocadas em ambientes onde “erros não são valorizados - ou pior, são punidos.” Como uma proposta alternativa, diz ser “importante que os alunos engajem-se na proposição de ideias - ou, para usar o termo matemático, que façam conjecturas sobre a matemática.” (Boaler, 2018, p. 12)

Para que a aprendizagem ocorra não são suficientes apenas a crença de que se pode aprender e o reconhecimento da importância do erro nesse processo. Há sempre a necessidade de condições adequadas e do esforço pessoal. O *esforço*, nesse caso, surge dos *desafios* apresentados. Boaler (2019) afirma que

Para que os estudantes se desenvolvam, eles precisam trabalhar em questões que os desafiem, questões que estão no limite de seu entendimento. E eles precisam trabalhar nesse tipo de atividade em um ambiente que encoraje os erros e no qual os estudantes tenham consciência dos benefícios dos erros. Esse é um ponto crítico. Além da atividade ser desafiadora para possibilitar que eles cometam erros, o ambiente também precisa ser encorajador, para que os alunos não enxerguem o desafio ou esforço como um impedimento. Ambos os componentes precisam trabalhar juntos para criar uma experiência de aprendizagem ideal (Boaler, 2019, p. 49).

Sob o conceito de *matemática multidimensional*, Valle (2019) destaca os seguintes aspectos pedagógicos que permitem aprender de forma diversa, criativa,

exploratória e flexível: ensino a partir de grandes ideias, desenvolvimento de senso e fluência numéricas, múltiplas representações (com ênfase em representações visuais) e proposição de tarefas abertas e investigativas.

Na *educação para a equidade e exercício do trabalho colaborativo*, Boaler refere-se às pesquisas e propostas das pesquisadoras Elizabeth Cohen e Rachel Lotan (em especial, sua obra *Planejando o trabalho em Grupo*, de 2014, com tradução publicada no Brasil em 2017), que identificam que as estratégias de trabalho em grupo apresentam resultados positivos, especialmente classes heterogêneas, com estudantes de diversas etnias, classes sociais e gêneros.

Algumas das exigências fundamentais para o trabalho em grupo, nessa perspectiva, são, nas considerações do professor Carlos Cabana e colaboradores:

1. Estruturar as aulas para que produzam engajamento em atividades adequadas ao trabalho em grupo;
2. Abordar conceitos matemáticos através de múltiplas representações;
3. Organizar o currículo em torno de ideias fundamentais;
4. Utilizar estratégias de argumentação e justificativa para incentivar os alunos a articular seu pensamento matemático;
5. Tornar público e valorizado o pensamento dos alunos por meio de apresentações (Cabana *et al.*, 2014, p. 234).

Cohen e Lotan (2014) salientam, no entanto, que o exercício do trabalho em grupo será tão melhor experimentado quanto mais as tarefas forem criadas ou adaptadas com esse objetivo. As autoras usam o termo *group-worthy tasks*, que traduzimos como *tarefas adequadas ao trabalho em grupo*.

Na lista das ideias de MM proposta por Valle, há ainda o importante elemento da *avaliação para a aprendizagem*, defendido por Boaler, entendendo os momentos de avaliação como oportunidades que os estudantes têm para responder a três questões: O que eu deveria saber? O que já sei? O que falta para atingir o objetivo desejado?

Outras pessoas, como o pesquisador Domingos Fernandes, diz de forma semelhante que a vantagem de uma avaliação formativa é permitir que alunos possam, desenvolver uma consciência das “eventuais diferenças entre o seu estado presente relativamente às aprendizagens e o estado que se pretende alcançar, assim como o que estarão dispostos a fazer para as reduzir ou mesmo eliminar” (Fernandes, 2006, p. 31).

3. Método

O estudo relatado foi de natureza qualitativa e, quanto aos objetivos, exploratório, já que teve a intenção de, esclarecer conceitos e ideias, especificamente o planejamento de tarefas abertas no âmbito das MM (Gil, 1999). A respeito da

técnica de coleta de dados, utilizou-se a pesquisa-ação que, de acordo com Thiollent (2007) caracteriza-se pelo binômio prática e conhecimento: a pesquisa auxilia na solução de um problema e aproveita-se do conhecimento assim construído.

A pesquisa-ação também pressupõe a *colaboração entre pesquisadores e participantes* do contexto estudado e neste trabalho identificamos que todos – o autor, membros do grupo de pesquisa, o ministrante da oficina que propôs a atividade e estudantes do curso de Licenciatura – atuaram como colaboradores ativos no processo de pesquisa, contribuindo com sugestões, experiências e perspectivas sobre o problema em questão.

No que diz respeito ao *ciclo de ação-reflexão*, isto é, quando participantes identificam um problema, planejam e implementam uma intervenção, observam os resultados e refletem sobre o que foi aprendido para ajustar futuras ações, ocorreram todas essas etapas, mesmo que não sempre com a participação das mesmas pessoas.

Todo o trabalho realizado, desde a escolha da tarefa até a sua avaliação teve como interesse a *orientação para a mudança*, no caso específico uma mudança no uso de tarefas no ensino e avaliação de uma disciplina do curso de Licenciatura em matemática, tanto em aspectos práticos como atitudinais.

A atividade foi planejada para uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), no *campus* São Paulo (O IFSP foi criado, com a estrutura atual, em 2008, mas existe como instituição de ensino técnico, sob o nome de Centro Federal de Tecnologia ou Escola Técnica Federal, desde 1965). Esse curso é oferecido desde 2008, com ingresso de 40 alunos por semestre, com duração de oito semestres. Tem como objetivo a formação inicial de professores e professoras de Matemática para a Educação Básica (séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Foi escolhida, para o cumprimento da tarefa, a disciplina Introdução à Lógica (LOGM4), então ministrada no quarto semestre do curso. De acordo com o projeto pedagógico do curso, o referido componente curricular tem como objetivo:

o desenvolvimento do raciocínio lógico nos alunos, sob uma forma mais crítica acerca dos conteúdos dos diferentes componentes curriculares, tornando-os mais argumentativos com base em critérios e em princípios logicamente validados. Dentre os conteúdos de lógica clássica aborda-se o cálculo proposicional clássico, a silogística aristotélica e o cálculo de predicados. (IFSP, 2011)

No estágio atual do curso já haviam sido apresentados aos alunos e alunas os fundamentos da Lógica de primeira ordem e dos silogismos categóricos, bem como realizados exercícios de "tradução" de textos escritos em Língua portuguesa para a notação com a simbologia da Lógica, vice-versa.

Considerando as sugestões do professor Jack Dieckmann, na oficina anteriormente citada, optou-se por inserir, como um dos itens de uma atividade de avaliação da disciplina, uma questão inspirada em "*Squares upon squares*" ("Quadrados sobre quadrados").

A tarefa tem como orientações para docentes o seguinte:

Como pontapé inicial, perguntamos aos alunos: "Como vocês veem as formas crescendo?", e pedimos que formulem uma resposta totalmente visual, esquecendo as contas e os números. [...] Assim que os alunos tiverem compartilhado como eles veem o crescimento do padrão, passamos às perguntas numéricas e algébricas. [...] Como extensão dessa tarefa, às vezes pedimos aos alunos para formularem expressões algébricas que combinem com as diferentes formas visuais de enxergar o crescimento do padrão. (Youcubed², 2017)

A figura 1 mostra a atividade dos quadrados que dá especial ênfase à pergunta "Como você vê as formas crescendo?", favorecendo a percepção visual na etapa de identificar a regularidade e antecedendo a escrita de uma expressão algebrizada.

Já a atividade "*Mystic Rose*", disponível no website NRICH³ traz a sugestão de analisar a descrição da construção de uma "rosa mística", que é definida como "uma linda imagem criada ao ligar os pontos que estão igualmente afastados em uma circunferência" (NRICH, 2019) como visto na imagem seguinte (Figura 2).

No texto da figura 2 há este enunciado:

Esta é uma rosa mística de 10 pontos. Os 10 pontos estão igualmente espaçados ao redor da circunferência. Quantos segmentos de reta são necessários para desenhá-la? Quantos segmentos de reta seriam necessários para desenhar uma rosa mística de 100 pontos? (NRICH, 2019 – tradução livre).

² Disponível em <https://www.youcubed.org/tasks/squares-upon-squares/>

³ Disponível em <https://nrich.maths.org/6703>.

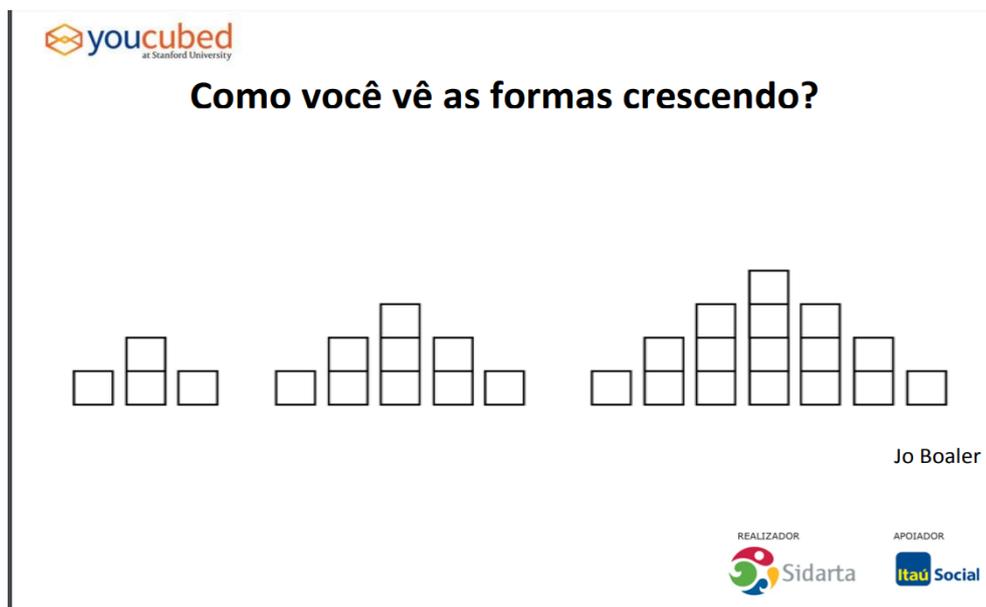
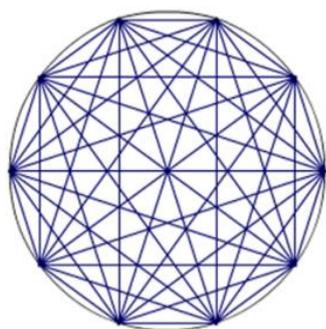


Figura 1 – Quadrados sobre quadrados.
Fonte: Youcubed, 2017.

Mystic Rose



This is a 10 pointed mystic rose.
The 10 points are equally spaced
around the circle.

How many lines are needed to
draw it?

How many lines would you need
for a 100 pointed mystic rose?



rich.maths.org

Figura 2 – Mystic rose.
Fonte: NRICH, 2019.

Inspirada nas duas tarefas apresentadas, a seguinte questão foi desenvolvida para compor a avaliação previamente mencionada:

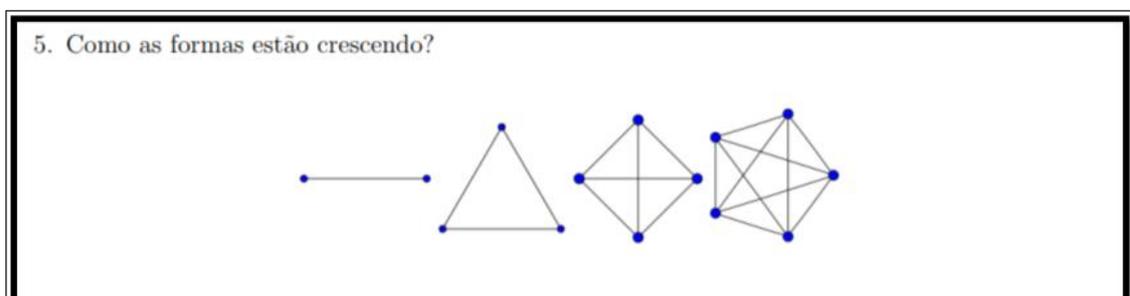


Figura 3 – Exercício nº 5 da Avaliação de LOGM4.

Fonte: O autor.

Antecipando a realização da atividade avaliativa, o docente fez um comentário sobre as diferenças básicas entre avaliações formativa e somativa, momento em que vários estudantes manifestaram que estavam cientes desta classificação e destacaram que as classificadas como formativas têm maior ênfase no desempenho que no produto final e, portanto, as devolutivas preferencialmente devem ser na forma de comentários, ao invés de escalas (numéricas ou outras), que mais se destinam a estabelecer ordenação e ranqueamento.

Aproveitando o assunto, foi mencionada a importância do trabalho em grupo no processo de aprendizagem, por permitir uma oportunidade para o exercício da argumentação e a construção de conceitos.

Finalmente, foram entregues aos grupos (constituídos de, no máximo, quatro componentes) as questões para que dessem início à leitura, discussões e resolução.

Posteriormente, foi solicitado que uma (um) representante de cada equipe apresentasse e comentasse suas respostas, com destaque para o processo iniciado com a observação de regularidades, passando por conjecturas, representações diversas e, finalmente, uma demonstração matemática que fosse capaz de justificar os resultados obtidos.

Antes, porém, da apresentação dos alunos, o docente ressaltou a importância de valorizar as respostas, sem a necessidade de eleger uma delas como sendo "a única resposta correta" e permitindo o debate franco das ideias.

4. Resultados e discussões

A proposta da questão feita pelo docente da disciplina foi criticada em uma das reuniões do Grupo de Pesquisa em Matemática e Educação para a Equidade (GPME), do qual o mesmo faz parte. Este processo foi conduzido em conformidade com o protocolo sugerido na Oficina (Figura 4).



Práticas de Mentalidades Matemáticas: desenvolvendo atividades abertas, criativas e visuais

Prof. Jack Dieckmann

Diretor do Youcubed - Universidade de Stanford - EUA
17 de agosto de 2019

UMA EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

Antes de começarmos, convém destacar as principais características de **atividades matemáticas abertas**:

- Permitem diferentes maneiras de abordar o problema;
- Favorecem conexões entre diferentes ideias matemáticas;
- São sempre desafiadoras;
- Estimulam a investigação;
- Favorecem o esforço produtivo como parte natural e esperada do processo de resolução;
- Possibilitam troca de ideias quando trabalhadas em grupos.

➡ Professor como um aprendiz de matemática:

Em relação à Matemática:

- Tente resolver a atividade por conta própria ou em grupo.
- Como você sabe que está no caminho certo?
- Representações/visuais/organizadores - Observe as representações que está usando. Quais são úteis? Quais são os percursos que podem começar bem, mas que tendem a não se manter desta maneira?

Mentalidade/esforço produtivo:

- Enquanto você está trabalhando, faça anotações sobre como você está se sentindo, suas frustrações, excitação, recursos de que necessita, perguntas que venha à mente, elementos que poderão construir empatia entre você, o trabalho, seus alunos etc.
- Como você gerencia seu desconforto com eventuais ambiguidades?
- Quais mensagens você está dando a si mesmo durante o trabalho (sou inteligente? etc.).

Reflexão:

- O que você aprendeu sobre si mesmo ou sobre a matemática ao realizar esta atividade?

Figura 4 – Material da oficina *Práticas de Mentalidades Matemáticas: desenvolvendo atividades abertas, criativas e visuais*

Fonte: Dieckmann, 2019.

As questões elaboradas por Dieckmann (2019) indicavam aspectos importantes para a formulação e execução de uma atividade aberta. A seguir, indicamos as respostas obtidas pelo autor no decorrer da pesquisa, a respeito da elaboração e execução da tarefa.

- tentar resolver sozinho ou em grupo?

Uma prática comum em salas de aula de matemática é a resolução solitária de exercícios e problemas. No contexto das tarefas de MM, entende-se que as diversas ideias oferecidas no trabalho em grupo permitem alcançar soluções mais criativas e benéficas para o aprendizado.

- como saber se está no caminho certo?

O trabalho em grupo também garante uma constante verificação dos cálculos ou conjecturas testadas. É mais provável identificar um erro em algum momento do processo, permitindo avaliá-lo e corrigi-lo ou mesmo recomeçar, com uma proposta totalmente diferente.

- observar as representações e percursos utilizados.

As diversas representações, em especial as representações visuais são de grande utilidade para apresentar a outras pessoas as ideias desenvolvidas na resolução do problema e servem como um processo de construção de uma simbologia adequada para o registro das etapas de solução.

- observar emoções e necessidade de recursos.

Uma tarefa aberta deve procurar instigar as pessoas em sua curiosidade. O professor pode ser considerado um recurso (um parceiro mais competente, no entendimento vygostskiano), mas outras fontes podem ser consultadas: livros e computadores, por exemplo. Além disso, o exercício de argumentação matemática, na comunicação entre as pessoas do grupo, é estimulado.

- há ambiguidades? que mensagens são transmitidas?

As tarefas abertas não precisam conter um enunciado detalhado em minúcias. Ambiguidades geram a necessidade de debates entre as pessoas do grupo que podem estabelecer consensos sobre notações e definições.

- habilidades e conteúdos matemáticos.

Listamos os seguintes conteúdos que poderiam ser abordados durante a resolução da questão:

- Progressão aritmética;
- Soma de n primeiros termos de PA;
- Fatoração de polinômios de segundo grau;

- Operações com polinômios;
 - Diagonais de polígonos;
 - Combinatória;
 - Triângulo aritmético;
 - Princípio de Indução Finita (PIF).
- estimular o esforço produtivo.

Uma tarefa que estimule a criatividade pode colocar as pessoas em um estado de atenção deliberada, com o interesse de pesquisar e estudar mais sobre o assunto.

- o que foi aprendido sobre a Matemática e sobre si mesmo?

Nesse aspecto, a tarefa tem a possibilidade de reforçar algumas mensagens importantes: as múltiplas estratégias de resolução de um problema, a valorização do trabalho em grupo, a administração do tempo, as trocas de informações e a abertura para conjecturas e demonstrações geradas a partir das observações.

5. Conclusões

A elaboração de tarefas abertas e visuais apresenta-se como uma necessidade na prática docente que adote a abordagem Mentalidades Matemáticas (MM), buscando superar paradigmas de aulas expositivas e reprodução e procedimentos, fomentando um ambiente de aprendizado dinâmico e colaborativo. Ao adotar princípios como valorização do erro, estímulo à diversidade de estratégias de resolução e ênfase em representações visuais, as tarefas desenvolvidas refletem um compromisso com a promoção da equidade e do desenvolvimento integral dos estudantes.

No entanto, é importante ressaltar que a elaboração de tarefas baseadas em MM requer um constante aprimoramento e adaptação às necessidades e características dos estudantes. Além disso, a colaboração entre educadores, pesquisadores e demais envolvidos no processo educacional se mostra fundamental para o desenvolvimento e disseminação dessa abordagem inovadora. (Darling-Hammond *et al.*, 2007)

6. Referências

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018. 272 p. ISBN 978-85-8429-114-4.

BOALER, J. **Limitless Mind**: learn, lead, and live without barriers. London: HarperOne, 2019.

CABANA, C.; NASIR, N.; SHREVE, B.; WOODBURY, E.; LOUIE, N. **Mathematics for equity**: A framework for successful practice. New York: Teachers College Press, 2014.

DARLING-HAMMOND, L.; HAMMERNESS, K.; BRANSFORS, J.; BERLINER, D.; COCHRAN-SMITH, M.; MCDONALD, M.; ZEICHNER, K. How teachers learn and develop. In: DARLING-HAMMOND, L.; BRANSFORD, J. (eds.) **Preparing teachers for a changing World**: what teachers should learn and be able to do. Jossey-Bass. 2007.

DIECKMANN, Jack. **Uma experiência matemática**. Práticas de Mentalidades Matemáticas. 17 ago. 2019.

FERNANDES, Domingos. Para uma teoria da avaliação formativa. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 19, n. 2, pp. 21-50, 2006.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. São Paulo: IFSP, 2011.

NRICH. **Mystic Rose**. Disponível em: <https://nrich.maths.org/6703>. Acesso em mar. 2017.

THIOLLENT, M. **Metodologia de pesquisa-ação**. 15 ed. São Paulo: Cortez, 2007.

VALLE, L. F. **Mathematical Mindsets (Mentalidades Matemáticas)**: uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das matemáticas. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado), IFSP, São Paulo, 2019. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?

YOUNCUBED. **Quadrados sobre quadrados**. Disponível em: <https://www.youcubed.org/ptbr/tasks/quadrados-sobre-quadrados/>. Acesso em mar. 2017.